Cuadernos de Clases

Introducción a las Mediciones de Laboratorio Nº 2

Dr. Ángel Horacio Rodríguez

Física CN – 2016

Recopilado del Libro "Introducción a las Mediciones de Laboratorio"

de Alberto Maiztegui y Reinaldo Gleiser UNC 1976

EL SIGNIFICADO DEL PROMEDIO Y DE SU ERROR MEDIO CUADRATICO

1. LOS ORIGENES DE LAS INCERTEZAS

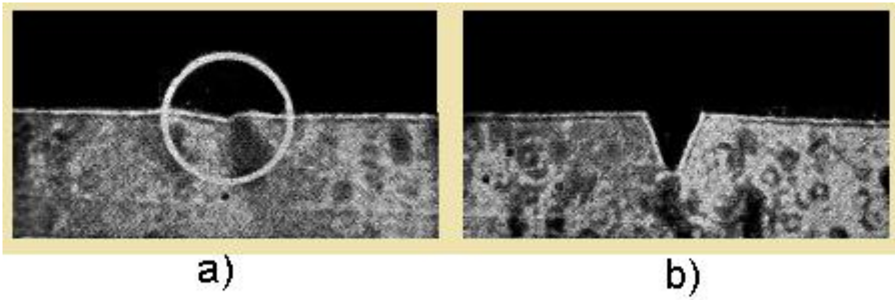
Las incertezas que acompañan al valor de la cantidad medida tienen sus orígenes en:

a) La definición de la unidad de medida; y —en el caso de las unidades fundamentales— en las imprecisiones originadas en la construcción del patrón que la materializa.

b) La determinación, o definición —buena, discreta o mala— de la cantidad por medir.

e) La apreciación del aparato de medición. d) El operador.

Nos concretaremos, como una delimitación de nuestro tratamiento, a mediciones en que las incertezas originadas en a) y en b) sean despreciables comparadas con las de origen c) y d). El metro patrón, por ejemplo, está definido con una precisión de 1 parte en 1.000 millones, o sea 10^{-9}. Este es el orden de magnitud de la incerteza introducida en una medición de una longitud, por la definición y construcción del metro patrón; y ' admitimos que en las mediciones a las que nos referiremos, esa incerteza es despreciable comparada con las de otros orígenes,



(Fig. 1) Mejorar la definición de los trazos sobre un patrón significa disminuir las incertezas con que contribuyen las imprecisiones originadas en la construcción de los prototipos al intervalo de incerteza de una medida de longitud.

En a) se tiene el perfil de un trozo de un prototipo de fines del siglo XIX; en b), el perfil de un trazo obtenido en 1957, con una nueva técnica. (De "La Metrologie", por P: Martin, Jefe del Laboratorio de Metrología de la Societé Genevoise d'Instruments de Physique).

Por otra parte, en general admitiremos una idealización de las cantidades por medir, Por ejemplo: cuando midamos un cilindro aceptaremos que la diferencia entre la pieza real y el cilindro geométrico al cual la asimilamos es despreciable comparada con las otras.

Nos ocuparemos, entonces, de las incertezas introducidas por el aparato y por el observador.

También dejaremos a un lado las cantidades definidas estadísticamente, como la vida media, o el alcance de una partícula radiactiva, o el valor de un resistor como promedio de N resistores diferentes, pero del mismo valor asignado por el fabricante.

Debemos aclarar aquí que en la práctica pueden aparecer otras fuentes de incerteza, los llamados errores sistemáticos, que pueden originarse en defectos de construcción o de calibración del aparato de medición, en métodos incorrectos de tornar las lecturas (errores de paralaje), etc.

En general, este tipo de incertezas son características de cada montaje experimental, por lo que su eliminación requiere un cuidadoso estudio de las condiciones e hipótesis en que se base la medición. De hecho, no admiten un tratamiento general, y no serán considerados en lo que sigue.

2. LOS INTERVALOS DE INCERTEZA

Una medida es tanto más significativa y valiosa cuanto menor es el intervalo de incerteza asociado a la medición. Pero . . . ¿cuál es, realmente, ese intervalo? ¿Cómo hacemos para determinarlo y definirlo?

Para fijar ideas, supongamos que una longitud ha sido medida un gran número de veces con un aparato cuya apreciación vale $\Delta X = 10^{-3}$mm, y que las lecturas están distribuidas fluctuando en un intervalo de, por ejemplo, 3.10^{-2} mm.

Si la apreciación del aparato es 10^{-2}mm, ello significa que el aparato es capaz de definir longitudes con una incerteza del orden de 10^{-2} mm, Pero si las lecturas están fluctuando en un intervalo de 3×10^{-2} mm, ello significa que el observador (al manejar el equipo) introduce incertezas que parecen constituir un desaprovechamiento de las posibilidades del aparato.

Estas incertezas son introducidas por el observador al aplicar "su criterio de medición", constituido por las condiciones que él mismo se fija (al usar el aparato) para decidir si está o no en condiciones de leer la escala. La dispersión de las lecturas obtenidas constituye una expresión de cuánto logra el operador controlar la aplicación de sus criterios de medición sobre el aparato que está usando.

Preguntémonos nuevamente: ¿cómo determinar el grado de incerteza que debemos atribuir a la medición constituida por un conjunto de lecturas de una misma cantidad? Una respuesta simple sería aceptar como intervalo de incerteza el intervalo que contiene todas las lecturas; pero está clara que sería un criterio demasiado burdo.

Enseguida veremos que un examen detenido de la distribución de todas las lecturas permite elaborar una definición del intervalo más apropiado para considerarlo como el intervalo de incerteza asociado a la medición. Y también veremos que éste es mucho menor (en general) que el intervalo donde fluctúan todas las lecturas.

3. EL ERROR MEDIO CUADRATICO DEL PROMEDIO

Supongamos que tenemos un primer conjunto de N lecturas y su promedio $\overline{X}_1$. Luego hacemos una segunda serie de N lecturas, y calculamos su promedio, $\overline{X}_2$; y así sucesivamente hasta tener M conjuntos de N lecturas cada uno:

$$\begin{array}{l}
\overline{X}_1 = (X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1N}) \,/\, N \\
\overline{X}_2 = (X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2N}) \,/\, N \\
\;\cdot \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\
\;\cdot \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\
\overline{X}_j = (X_{j1} + X_{j2} + \ldots + X_{jN}) \,/\, N \\
\;\cdot \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\
\;\cdot \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\
\overline{X}_M = (X_{M1} + X_{M2} + \ldots + X_{MN}) \,/\, N
\end{array}$$

Vamos a demostrar que el error medio cuadrático $E = \sigma\,(\overline{X}_j)$ del conjunto de los M promedios; es $\overline{X}_j$ menor que el error medio cuadrático del conjunto de las lecturas. Y luego examinaremos cuidadosamente el significado físico de E.

El promedio $\overline{X}$ de los promedios $\overline{X}_j$; (que es el mismo que el de las lecturas Xij) es :

El promedio $\bar{X}$ de los promedios $\bar{X}_j$ (que es el mismo que el de las lecturas X_{ij}) es:

$$\bar{\bar{X}} = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \ldots + \bar{X}_j + \ldots + \bar{X}_M) \;/\; M$$

Consideremos ahora los promedios $\bar{x}_i$ de las columnas:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= (X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{j1} + \ldots + X_{M1}) \;/\; M \\
&\vdots \\
\bar{x}_i &= (X_{1i} + X_{2i} + \ldots + X_{ji} + \ldots + X_{Mi}) \;/\; M \\
&\vdots \\
\bar{x}_N &= (X_{1N} + X_{2N} + \ldots + X_{jN} + \ldots + X_{MN}) \;/\; M
\end{aligned}$$

y entonces puede escribirse:

$$X = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_i + \ldots + \bar{x}_N) \;/\; N$$

Definamos ahora los apartamientos del valor medio:

$$\Delta x_{11} = \bar{x}_1 - X_{11} \text{ ; en general: } \Delta x_{ij} = \bar{x}_i - X_{ij}$$

$$\Delta \bar{X}_1 = \bar{\bar{X}} - X_1 \text{ ; en general: } \Delta \bar{X}_j = \bar{X} - \bar{X}_j$$

Por otra parte obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{X}_1 &= \bar{\bar{X}} - \bar{X}_1 = \\
&= \Big[(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_i + \ldots + \bar{x}_N) - \\
&\quad - (X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1j} + \ldots + X_{1N}) \Big] \;/\; N = \\
&= (\Delta x_{11} + \Delta x_{12} + \ldots + \Delta x_{1i} + \ldots + \Delta x_{1N}) \;/\; N
\end{aligned}$$

En general:

$$\Delta \overline{X}_j = (\Delta x_{j1} + \Delta x_{j2} + \dots + \Delta x_{ji} + \dots + \Delta x_{jN}) \;/N$$

Y por último:

$$\Delta \overline{X}_M = (\Delta x_{M1} + \Delta x_{M2} + \dots + \Delta x_{Mi} + \dots + \Delta x_{MN}) \;/N$$

Elevando al cuadrado y sumando sobre j desde 1 hasta M:

$$\sum_{j=1}^{M} (\Delta \overline{X}_j)^2 = (\Delta \overline{X}_1)^2 + (\Delta \overline{X}_2) + \dots + (\Delta \overline{X}_j)^2 + \dots + (\Delta \overline{X}_M)^2 =$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{N^2} \Bigg\{ \Bigg[& (\Delta x_{11})^2 + (\Delta x_{12})^2 + \dots + (\Delta x_{1N})^2 + \dots \\ & \dots + (\Delta x_{j1})^2 + (\Delta x_{j2})^2 + \dots + (\Delta x_{jN})^2 + \dots \\ & \dots + (\Delta x_{M1})^2 + (\Delta x_{M2})^2 + \dots + (\Delta x_{MN})^2 \Bigg] + \\ & + \Big[2 \Delta x_{11} \,.\, \Delta x_{12} \,.\, + 2 \Delta x_{11} \,.\, \Delta x_{13} \,.\, + \dots \\ & \dots + 2 \Delta x_{11} \,.\, \Delta x_{1N} \Big] + \dots \Big[2 \Delta x_{j1} \Delta x_{j2} + 2 \Delta x_{j1} \Delta x_{j3} . + \dots \Big] \Bigg\} \end{aligned}$$

Pero los corchetes posteriores al primero (que son sumas de productos rectangulares) contienen tanto términos de signo positivo como de signo negativo, que tienden a cancelarse. Por tanto, si M y N son números no pequeños (del orden de 10), la suma de los productos rectangulares es despreciable comparada con la suma de los términos cuadráticos.

Por otra parte, como σ es independiente del número de lecturas (cosa que no demostraremos pero que verificaremos reiteradamente), cada término cuadrático puede aproximarse por N σ^2, con lo cual:

$$\sum_{j=1}^{M} (\Delta \bar{X}_j)^2 \cong \frac{1}{N^2} \left\{ N\sigma^2 + \ldots (\text{M veces}) \ldots + N\sigma^2 \right\} = \frac{M}{N}\sigma^2$$

Apliquemos a los promedios la definición de error medio cuadrático, y llamémoslo E:

$$\sigma(\bar{X}_j) = E = \sqrt{1/M \sum (\bar{X} - \bar{X}_j)^2} = \sqrt{1/M \sum (\Delta \bar{X}_j)^2}$$

con lo cual resulta:

$$M\,E^2 = \sum (\Delta \bar{X}_j)^2 \cong M\,\sigma^2 / N$$

y, en definitiva:

$$\boxed{E \cong \sigma / \sqrt{N}}$$

"El error medio cuadrático de los M promedios obtenidos agrupando de a N las MN lecturas consideradas es aproximadamente $N^{1/2}$ veces menor que el error medio cuadrático de las lecturas".

4. CONFIRMACION Y EXTENSION DE LA RAZON DE SER DEL PROMEDIO.

Este resultado es sumamente importante, pues indica que si se ha realizado una serie de MN lecturas, todas ellas fluctuando en un intervalo un poco mayor que 2σ, al agrupar las lecturas de a N, los correspondientes promedios fluctúan en un intervalo $N^{1/2}$ veces menor.

Insistamos, volviendo a referirnos a las consideraciones del parágrafo 2: si bien las lecturas individuales fluctúan en un intervalo de 3×10^{-2}mm, acabamos de "encontrar" una cantidad —el promedio— unívocamente definido por las lecturas, cuya fluctuación es aproximadamente $N^{1/2}$ veces menor que la fluctuación de las lecturas.

Es clara, entonces, la conveniencia de comunicar el resultado de una medición dando $\bar{X}$ y E, mejor que dando $\bar{X}$ y σ.

5. LA IMPORTANCIA Y EL ALCANCE DE UNA SOLA SERIE DE LECTURAS

Supongamos que se han obtenido N = 10 lecturas al medir una misma cantidad. Con ellas se calculan $\bar{X}$, σ y E. Si se toman luego M series, todas ellas de N = 10 lecturas, se obtendrán M promedios $\bar{X}_j$, M errores medios cuadráticos σ de lecturas, y M errores medios cuadráticos E_j de promedios.

Como σ no depende del número de lecturas (siempre que pertenezcan al mismo aparato y al mismo operador), los M promedios tienen el mismo σ; como los E son errores medios cuadráticos, no dependen del número de promedios, M, que se hayan obtenido. O sea: ni σ ni E dependen de M; es decir, nada se ha ganado (con respecto a σ y a E) con repetir M veces las series de a N = 10, pues todos los promedios fluctúan en un intervalo aproximadamente igual a $\sigma/10^{1/2}$ ...¡ y a este intervalo ya lo determinamos al hacer la primera serie de N = 10 lecturas!

Pero sigamos examinando las posibilidades del conjunto de MN lecturas realizadas. Si M y N son suficientemente grandes, podemos reagrupar las lecturas en M' conjuntos de N' lecturas en cada uno. Será, naturalmente, MN = M'N'; y supongamos, como ejemplo que N' = 4N (y M' = M/4). Ahora tenemos menos promedios, pero cada uno está integrado por mayor cantidad de lecturas. Como el error medio cuadrático de las lecturas no depende de N ni de M, seguimos teniendo el mismo Ir. Pero ahora es

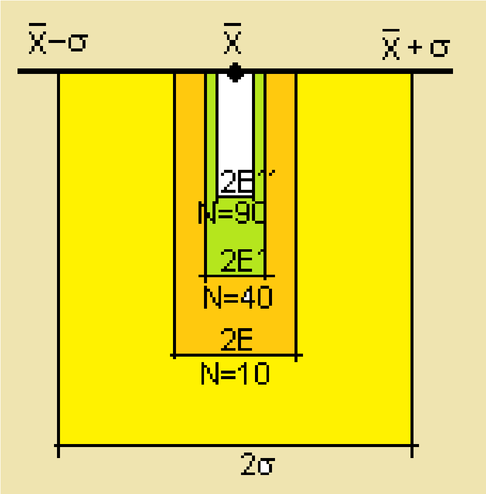
$$E' = \sigma \,/\, \sqrt{N'} = \sigma \,/\, \sqrt{4N} = E \,/\, 2$$

es decir que la fluctuación de los promedios se ha reducido a la mitad al tomar promedios con un número de lecturas 4 veces mayor.

Obsérvese que con hacer una sola serie de N' lecturas ya se está en condiciones de calcular σ (que no depende de N') y E' (que sí depende de N').

Es inmediato pensar que si se dispone de un número suficiente de lecturas, conviene calcular promedios con N"> N', y ellos fluctúan menos que los otros promedios.

Obsérvese que con hacer una sola serie de N" lecturas ya se está en condiciones de calcular o (que no depende de N") y E" (que sí depende de N"),



(Fig. 2) Verifique el lector si los intervalos dibujados están en proporción correcta, de acuerdo con la expresión general $E = a / \sqrt{N}$.

Pero entonces, si tenemos M N = n lecturas en total, considerémoslas a todas de una sola vez, e interpretemos que el suyo es uno de los promedios de un conjunto de promedios de a n lecturas (a los otros promedios los imaginamos, no los obtenemos).

El σ de las n lecturas es el mismo que el de las anteriores (pues no depende de n), pero el E es el menor intervalo de incerteza que podemos definir con las n= M N lecturas que efectivamente hemos leído.

Está claro, entonces, que el promedio X de un conjunto de lecturas es una cantidad unívocamente determinada por el conjunto de lecturas, y que le corresponde un intervalo de incerteza algo mayor que 2E, también unívocamente determinado por las lecturas.

6. ¿PUEDE ANULARSE LA FLUCTUACION DE LOS PROMEDIOS?

Anular la fluctuación significaría encontrar una condición que permita medir obteniendo exactamente el mismo promedio, En otras palabras, significaría encontrar el valor exacto de la cantidad medida, con incerteza nula.

De lo dicho últimamente, ello parecería posible, o casi posible, pues bastaría tomar N suficientemente grande para que el intervalo de incerteza se haga tan chico como se quiera; y en el límite :

$$E = \sigma / \sqrt{N} \rightarrow 0$$

Estadísticamente, cierto; físicamente, no. Si con un aparato que aprecia 10^{-2} (o sea, $\sigma \cong 10^{-2}$), con N = 100 se lograrían promedios que fluctúan en un intervalo

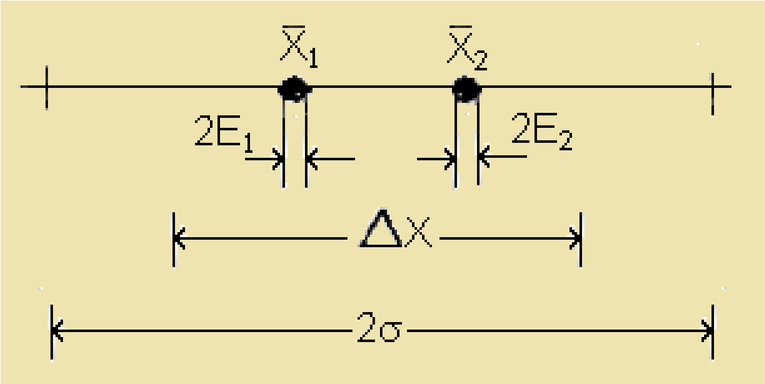
$$E = \sigma / \sqrt{100} = 10^{-3}$$

Con 10.000 lecturas se llegaría a

$$E = \sigma / \sqrt{10.000} = \sigma / 100 = 10^{-4}$$

Con 1.000.000 de lecturas se llegaría a $E = 10^{-5}$ .. pero..cómo es posible que con un aparato que aprecia hasta 10^{-3} se obtengan intervalos de incerteza de 10^{-5}?

Para responder a esta pregunta conviene recordar que el promedio es una cantidad con sentido estadístico y también —con las limitaciones que estamos considerando — con sentido físico. Es posible que un mismo observador, con un mismo aparato, obtenga un E tan pequeño como él lo desea, leyendo un número suficientemente grande de lecturas. Tiene sentido físico esperar que otro observador, con otro aparato (de igual construcción que el primero) obtenga promedios cuya fluctuación también sea despreciable comparada con la apreciación del aparato. Pero no tiene sentido físico esperar que los dos conjuntos de promedios obtenidos por cada observador por separado, fluctúen en un común intervalo de incerteza.



(Fig. 3) Con un número de lecturas suficientemente grande, dos observadores pueden obtener promedios con errores medios cuadráticos E1 y E2 despreciables frente a ΔX, la apreciación del instrumento de lectura; pero no tiene sentido físico esperar que sus intervalos de incerteza (X_1 — E_1 ; X_1 + E_1) y (X_2 — E_2 ; X_2+E_2) tengan puntos comunes. La información obtenida así no, es repetible, y —en ese sentido— no es comunicable.

Es decir : el observador 1, trabajando con un aparato de apreciación ΔX_1 puede obtener con N suficientemente grande un promedio $\bar{X}_1$ con un error medio cuadrático E « ΔX; el observador 2, con un aparato igual (y aún con el mismo aparato), puede obtener un promedio $\bar{X}_2$ con un E_2 « X. Pero no tiene sentido físico esperar que el intervalo de incerteza del operador 1 (que es del orden de $2E_1$) tenga puntos comunes con el intervalo de incerteza asociado a la medición del operador 2 (que es del orden de $2E_2$) Y no tiene sentido físico, porque el aparato usado sólo está en condiciones de asegurar sus lecturas con un intervalo de incertezas del orden de ΔX o —en el mejor de los casos—de 0,1 ΔX.

Por tanto, si se quiere alcanzar el límite de la información obtenible con un aparato, hay que calcular un número de lecturas N tal que con él se obtenga un E del orden de magnitud de (a lo sumo) 0,1 ΔX. Con N mayores, el resultado no constituye una información 'intercambiable entre los interesados en comunicarse trabajos científicos repetibles en laboratorios equivalentes.

En resumen, resultados muy importantes del análisis que hemos hecho en este capítulo, son:

1) La Estadística puede mejorar una medición repitiendo lecturas un adecuado número de veces;

2) ello es posible a partir de la evidencia experimental que las lecturas se dispersan simétricamente alrededor del promedio. Este es como un "punto de equilibrio" de las desviaciones, que hallan en él una compensación;

3) el mejoramiento no tiene sentido físico mucho más allá de la apreciación con la cual fue construido el aparato;

4) el resultado de la medición se presenta bajo la forma $\overline{X} \pm E$, con lo cual comunica el promedio como el valor más plausible, y el error medio cuadrático del promedio como un intervalo de incerteza asociado;

5) cada vez que —en iguales condiciones— se mida la cantidad X con el mismo número de lecturas N el nuevo promedio tiene aproximadamente el 66% de probabilidad de pertenecer al intervalo anterior.

7. EJEMPLO UNA MEDICION DEL SEGUNDO SIDEREO.

a) Descripción del equipo.

Este experimento fue realizado con un cronógrafo de un Observatorio Astronómico, que permite inscribir señales con dos plumas en una misma cinta de papel en movimiento. En nuestro caso, una de las plumas inscribía trazos separados por un lapso de 1 segundo solar medio con una apreciación de 10^{-2} segundos. La otra, comandada por un pulsador, permitía inscribir trazos a voluntad del operador; y éste oprimía la el pulsador cada vez que oía una señal sonora emitida por un parlante a intervalos de 1 segundo sidéreo..

Como el movimiento de la cinta era uniforme, los lapsos entre trazos son directamente proporcionales a las longitudes entre trazos en la cinta de papel. Por tanto, midiendo éstos y adoptando como unidad el segundo solar medio es posible calcular el segundo sidéreo de acuerdo con los criterios expuestos anteriormente.

b) Las lecturas.

Las longitudes entre trazos se midieron con un aparato adaptado al cronógrafo, cuya apreciación es $\Delta X = 0{,}01s$, expresada en segundos medios.

En total se tomaron 600 lecturas. Para asegurarnos de que las lecturas fueran independientes entre sí, sólo consideramos intervalos disjuntos, es decir, sin extremos comunes; lo cual produjo dos conjuntos de lecturas útiles del segundo sidéreo.

c) Cómo comunicar el resultado de estas mediciones:

Los dos conjuntos de lecturas independientes produjeron las siguientes cantidades:

Promedio $\bar{X}_1 = 0{,}9985 \quad ; \quad \bar{X}_2 = 0{,}9954$

Error medio cuadrático de las lecturas $\sigma_1 = 0{,}0568 \quad ; \quad \sigma_2 = 0{,}0538$

Error medio cuadrático del promedio $E_1 = 0{,}0033 \quad ; \quad E_2 = 0{,}0031$

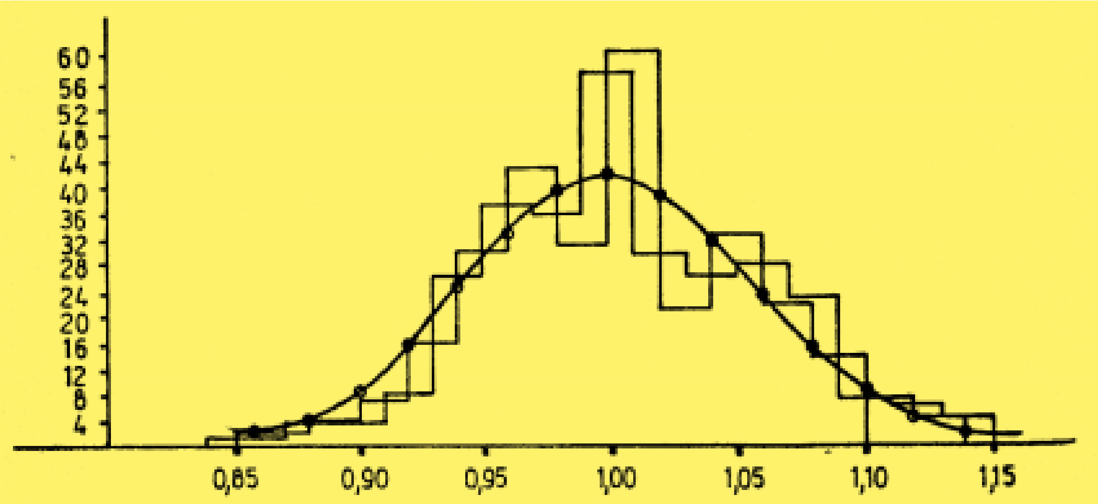
El resultado de la primera medición se expresa:

$$X = \bar{X}_1 \pm E_1 = (0{,}998 \pm 0{,}003)\ s$$

y el de la segunda:

$$X = \bar{X}_2 \pm E_2 = (0{,}995 \pm 0{,}003)\ s$$

en donde el número de cifras significativas se ha reducido al que resulta de expresar los E con una sola.

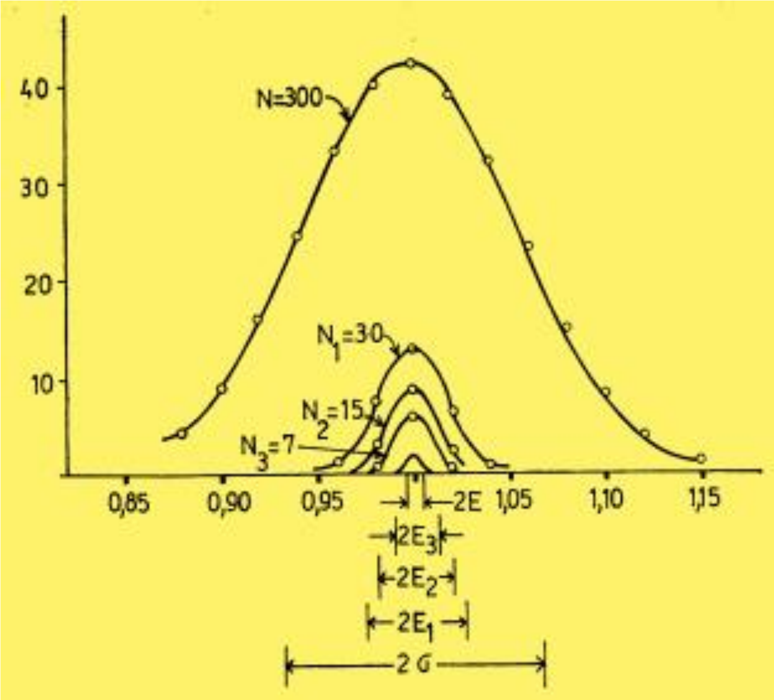


(Fig. 4) Dos nuevos histogramas formados a partir del mismo conjunto de lecturas. Ambos están formados por las lecturas comprendidas en intervalos de longitud 0,02; pero uno de ellos está formado con intervalos de extremos impares. Ambos histogramas son equivalentes, y la falta de coincidencia es una expresión de la naturaleza aproximada die la información contenida en un histograma. La curva continúa es la curva de Gauss correspondiente a esos histogramas.

d) Los errores de promedios con distintos N.

En una de las mediciones, para verificar la validez de la relación deducida antes $E = \sigma/N^{1/2}$ hemos agrupado las 300 lecturas primeramente de a 10; luego de a 20 y luego de a 40. En la tabla siguiente mostramos el resultado de esta verificación

N	$\bar{\bar{X}}$	$\sigma(\bar{\bar{X}})$	$E = \sigma_{300}/\sqrt{N}$
10	0,9985	0,0183	0,0180
20	0,9985	0,0135	0,0130
40	0,9983	0,0090	0,0090
300	0,9985	0,0033	



(Fig. 5) Curvas de Gauss trazadas con N = 300 (lecturas); con N_1 = 30 (promedios de a 10); con N_2 = 15 (promedios de a 20) y con N_3 = 7 7 (promedios de a 40 lecturas cada uno). Hemos dibujado la última curvita y hemos ubicado el intervalo 2E a pesar de no tener derecho a ello: pues con un solo promedio que tenemos no se puede trazar una curva de promedias, ni saber si él está dentro o fuera de los 2/3 correspondientes.

En la figura 5 están representadas varias curvas de Gauss elaboradas con el material de la misma medición anterior, aplicando la fórmula vista antes: $E = \sigma/N^{1/2}$.

La de mayor altura muestra la distribución teórica de lecturas. La siguiente, señalada con N_1 = 30, muestra cómo se distribuyen los promedios que se formen con grupos de a 10 lecturas, de los cuales hemos podido formar 30 promedios. La tercera, N_2 = 15, muestra cómo se distribuyen los promedios que se formen con grupos de a 20 lecturas, de los cuales hemos podido formar 15 promedios. La cuarta, N_3 = 7, muestra cómo se distribuyen los promedios que se formen con grupos de a 40 lecturas, de los cuales hemos podido formar 7. Y la curva más pequeña representa, aproximadamente, cómo se distribuyen los promedios que se formen con grupos de a 300 lecturas, de los cuales con este conjunto de 300 lecturas hemos formado uno solo.

Pero disponemos de otro promedio de 300 lecturas —por la forma en que dispusimos nuestro trabajo— y es el señalado con X_2 = 0,9954. Obsérvese que éste está en el borde del intervalo con centro en X_2 = 0,998s y amplitud 2E = 0,003.

La probabilidad de caer dentro del intervalo, para un promedio obtenido con 300 lecturas, vale aproximadamente 2/3.